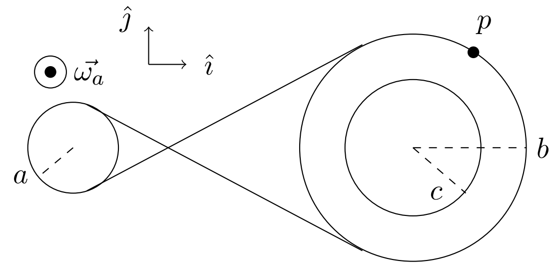
FS-1112: PRIMER PARCIAL

Universidad Simón Bolívar
Enero-Marzo 2017
Sartenejas, 08 de febrero de 2017

Nombre:__________________________________. Carnet:________________. Sección:______.

<u>Parte I</u>: Selección simple (20 puntos). A continuación se presentan 10 planteamientos de selección simple con un valor de 2 puntos cada uno. Marque con una X la opción que considere correcta de cada planteamiento. Justifique cada una de las respuestas que haya escogido. Una opción marcada sin justificación será considerada como incorrecta. Cada planteamiento tiene una única respuesta correcta. Si marca más de una opción por planteamiento, será considerado como respuesta incorrecta. No hay factor de corrección.

El sistema mostrado en la figura consta de tres discos cuyos respectivos radios a, b y c son conocidos. Los discos de radios b y c son coaxiales y están unidos entre sí. Una cadena está colocada alrededor de los discos de radio a y b, como se muestra. La cadena no desliza con las superficies de los discos. Cada disco rota libremente en torno al eje que pasa por su centro y es perpendicular al plano de la hoja. La velocidad angular $\vec{\omega}_a$ del disco de radio a es conocida. Con base en esto, responda los siguientes dos planteamientos.

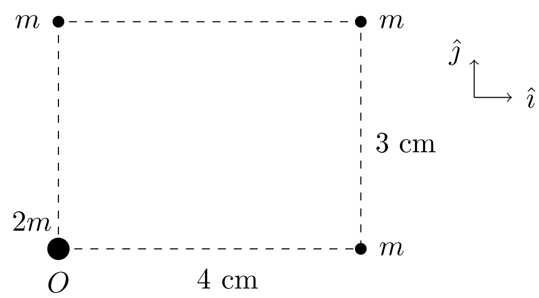


1. (2 pts.) La velocidad angular $\vec{\omega}_c$ del disco de radio c es:
   ( ) $\frac{a}{b}\vec{\omega}_a$
   (X) $-\frac{a}{b}\vec{\omega}_a$
   ( ) $-\frac{a}{c}\vec{\omega}_a$
   ( ) $\frac{b}{a}\vec{\omega}_a$
   ( ) Ninguna de las anteriores.

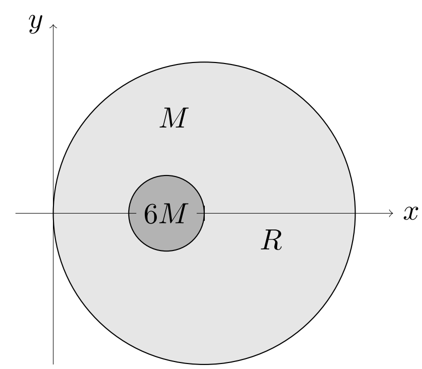
2. (2 pts.) La rapidez del punto p en la periferia del disco de radio b es:
   ( ) $\omega_a \cdot c$
   (X) $\omega_a \cdot a$
   ( ) $\omega_a^2 \cdot b$
   ( ) $\omega_a \cdot b$
   ( ) Ninguna de las anteriores.

3. (2 pts.) Un muchacho de masa M se encuentra patinando sobre una pista de hielo horizontal con una velocidad $\vec{v}_o = v_o\hat{\imath}$ constante mientras sostiene una bola de boliche de masa $m = \frac{1}{9}M$. En cierto instante, el muchacho decide arrojar la bola con velocidad $\vec{u} = \frac{20}{9}\, v_o\hat{\imath}$ respecto a sí mismo. La velocidad del muchacho luego de haber arrojado la bola es:
   ( ) $\frac{10}{9}\vec{v}_o$
   (X) $\frac{7}{9}\vec{v}_o$
   ( ) $-\frac{10}{9}\vec{v}_o$
   ( ) $\frac{9}{10}\vec{v}_o$
   ( ) Ninguna de las anteriores.

4. (2 pts.) La figura adjunta consta de cuatro masas puntuales, tres con masa m y una con masa $2m$, ubicadas en los vértices de un rectángulo; encontrándose el vértice inferior izquierdo justo en el punto O. El centro de masa de la figura medida desde el punto O se encuentra en:
   ( ) $\frac{1}{5}(8\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})$ [cm]
   (X) $\frac{1}{5}(8\hat{\imath} + 6\hat{\jmath})$ [cm]
   ( ) $\frac{8}{3}\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ [cm]
   ( ) $\frac{2}{5}\hat{\imath} + \frac{3}{10}\hat{\jmath}$ [cm]
   ( ) Ninguna de las anteriores.



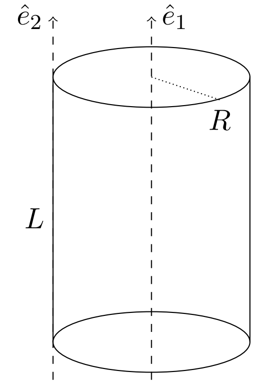
La figura adjunta muestra la vista superior de un disco de masa M y radio R, al cual se le ha acoplado encima otro disco de masa $6M$ y radio $\frac{1}{4}R$, centrado sobre el eje x a $\frac{3}{4}R$ a la derecha del origen. Ambos discos son uniformes y tan delgados que pueden considerarse planos y se ubican justo sobre el plano x-y. Con base en esta información, responda los dos siguientes planteamientos:



5. (2 pts.) El momento de inercia de la figura respecto al eje z que sale perpendicularmente del plano de la hoja es:
   ( ) $\frac{11}{16}MR^2$
   (X) $\frac{81}{16}MR^2$
   ( ) $\frac{6}{4}MR^2$
   ( ) $\frac{17}{16}MR^2$
   ( ) Ninguna de las anteriores.

6. (2 pts.) El momento de inercia de la figura con respecto al eje x es:
   ( ) $\frac{11}{16}MR^2$
   (X) $\frac{11}{32}MR^2$
   ( ) $\frac{17}{6}MR^2$
   ( ) $\frac{21}{16}MR^2$
   ( ) Ninguna de las anteriores.

7. (2 pts.) La figura adjunta muestra un cilindro de masa M uniforme, radio R y longitud L que puede rotar en torno a dos ejes, $\hat{e}_1$ (que pasa justo por su centro y es paralelo al eje de simetría axial) o $\hat{e}_2$, con rapidez angular ω_1 o ω_2, respectivamente. ¿Qué relación deben tener ω_1 y ω_2 para que las energías cinéticas sean iguales?



( ) $\omega_2 = \omega_1$

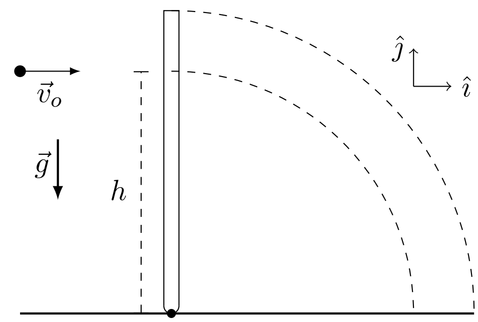
(X) $\omega_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\omega_1$

( ) $\omega_2 = \frac{1}{3}\,\omega_1$

( ) $\omega_2 = \frac{1}{2}\,\omega_1$

( ) Ninguna de las anteriores.

Una barra de masa M uniforme y longitud L se encuentra inicialmente en equilibrio inestable de forma vertical. El extremo inferior de la barra está articulada a una bisagra sin fricción. Una bala (supuesta puntual) de masa $m = \frac{5}{16}M$, viaja con velocidad $\vec{v}_0 = v_o\hat{\imath}$, impacta en la barra a una altura $h = \frac{4}{5}L$ medida desde el suelo, quedando incrustada. Desprecie cualquier deformación que pueda tener la barra debido al impacto de la bala. Tras la colisión, el conjunto barra y bala se mueven solidariamente. Vea la figura adjunta. Utilice esta información para responder los siguientes tres planteamientos.



8. (2 pts.) La velocidad de la bala justo después de la colisión es:

( ) $\frac{1}{9}\vec{v}_o$

(X) $\frac{3}{8}\vec{v}_o$

( ) $\frac{5}{21}\vec{v}_o$

( ) $\vec{v}_o$

( ) Ninguna de las anteriores.

9. (2 pts.) La velocidad angular de la barra justo tras la colisión es:

( ) $\frac{25}{84}\frac{v_o}{L}(-\hat{k})$

(X) $\frac{15}{32}\frac{v_o}{L}(-\hat{k})$

( ) $\frac{3}{4}\frac{v_o}{L}\hat{k}$

( ) $\frac{10}{21}\frac{v_o}{L}\hat{k}$

( ) Ninguna de las anteriores.

10. (2 pts.) Sea K' la energía cinética del sistema justo después de la colisión, la energía cinética del sistema al contactar con el suelo es:

( ) $K' + \frac{11}{10}MgL$

( ) $K' + \frac{1}{2}MgL$

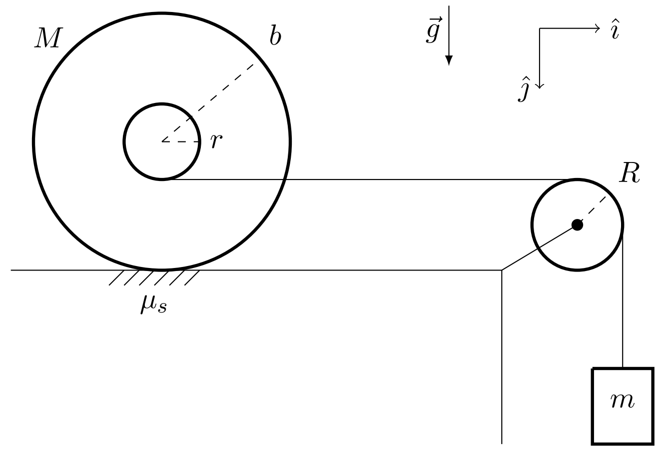
( ) $K' - \frac{1}{2}MgL$

( ) $K' - \frac{3}{4}MgL$

(X) Ninguna de las anteriores

Parte II: Problema de desarrollo (15 puntos). A continuación se presenta un problema que debe desarrollar. Justifique cada argumento siendo coherente, claro, conciso, ordenado y escribiendo con letra legible.

11. Un yo-yo de masa $M = 2m$, conformado por dos discos de radio $b = 5r$ y un cilindro de radio r alrededor del cual se enrolla una cuerda ideal, se coloca sobre un plano horizontal con fricción, siendo $\mu_s = \frac{4}{5}$ el coeficiente de roce estático entre la superficie y el yo-yo. La cuerda del yo-yo pasa por una polea ideal de radio $R = \frac{8}{5}r$. Al extremo libre de la cuerda se le ata un bloque de masa m suspendido en la vertical. Vea la figura. El sistema se encuentra inicialmente en reposo y el yo-yo rueda sin deslizar sobre la superficie. El momento de inercia del yo-yo respecto a un eje perpendicular al plano de la hoja que pasa por su centro de masa es conocido y vale $I_{\text{CM}} = 14mr^2$. Calcule:



(a) (3 pts.) La relación entre la aceleración del bloque y la aceleración del centro de masa del yo-yo.

(b) (4 pts.) La aceleración angular del yo-yo.

(c) (2 pts.) La aceleración angular de la polea.

(d) (3 pts.) El módulo de la tensión de la cuerda.

(e) (3 pts.) La fricción que ejerce la superficie sobre el yo-yo.

Respuestas

$$a_{CM} = \frac{5}{4}a_b$$

$$\alpha_{yo-yo} = \frac{1}{20}\frac{g}{r}$$

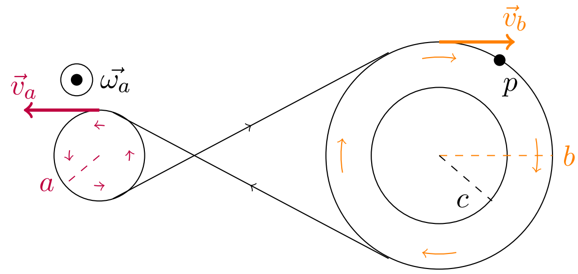
$$\alpha_{polea} = \frac{1}{8}\frac{g}{r}$$

$$T = \frac{4}{5}mg$$

$$\vec{f}_r = \frac{3}{10}mg(-\hat{\imath})$$

Explicaciones

1. Como la correa no desliza, la velocidad tangencial debe tener igual magnitud en el disco a y en el b, pero sus $\vec{\omega}$ tienen direcciones opuestas. Dado que el disco c y el disco b están en el mismo eje, $\vec{\omega_c} = \vec{\omega_b}$. Por lo tanto:
   $\vec{v}_a = -\vec{v}_b \Rightarrow \vec{\omega}_a a = -\vec{\omega}_c b \Rightarrow \boxed{\omega_c = -\frac{a}{b}\vec{\omega}_a}$



---

2. El punto p tiene la misma rapidez que cualquier punto en la periferia de b, y como vimos en el ejercicio anterior, dicha rapidez es la misma que tienen los puntos en el borde del disco a. Por lo tanto $\boxed{v_p = \omega_a \cdot a}$.

---

3. Nos dicen que la velocidad del muchacho es constante, y que además la pista es de hielo, por lo que podemos asumir que no hay fuerzas externas, al menos en $\hat{\imath}$.

   Eso quiere decir que la velocidad del centro de masa del sistema no cambia. Tomando en cuenta que $\vec{v}_{CM}|_T = \dfrac{m\vec{v}_m|_T + M\vec{v}_M|_T}{M+m}$, tenemos inicialmente:

   $$\vec{v}_{CM}|_T = \frac{\frac{1}{9}M\vec{v}_o + M\vec{v}_o}{\frac{10}{9}M} = \vec{v}_o$$

   Luego, como tenemos que la bola se lanza con una velocidad respecto al muchacho, la transformación de Galileo correspondiente sería:

   $$\vec{v}_m|_T = \vec{v}_m|_M + \vec{v}_M|_T$$

   Ahora sustituimos ese valor en la expresión para la velocidad del centro de masa del sistema. Recordando que $\vec{v}_m|_M = \frac{20}{8}v_o\hat{\imath}$, entonces:

   $$\vec{v}_{CM}|_T = v_o\hat{\imath} = \frac{\frac{1}{9}M\vec{v}_m|_T + M\vec{v}_M|_T}{\frac{10}{9}M} \implies v_o\hat{\imath} = \frac{9}{10}\left(\frac{1}{9}(\vec{v}_m|_M + \vec{v}_M|_T) + \vec{v}_M|_T\right) \implies \boxed{\vec{v}_M|_T = \frac{7}{9}\vec{v}_o}$$

---

4. Recordando que $\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum m_i\vec{r_i}$

   $$\vec{r}_{CM} = \frac{m(4\hat{\imath}+3\hat{\jmath}) + m(4\hat{\imath}) + m(3\hat{\jmath}) + m(\vec{0})}{m+m+m+3m} \implies \boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{1}{5}(8\hat{\imath}+6\hat{\jmath})}$$

---

5. Por teorema de Steiner (teorema de ejes paralelos), el momento de inercia de un sólido de masa M respecto a un eje paralelo que se encuentre a una distancia D es $I = I_{CM} + MD^2$. Recordemos que el I_{CM} de un disco homogéneo respecto a un eje perpendicular a su radio es $\frac{1}{2}MR^2$. El I_{total} será la suma de los momentos de inercia de los discos, es decir:

   $$I_{total} = I_1 + I_2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 + \frac{1}{2}(6M)\left(\frac{1}{4}R\right)^2 + 6M\left(\frac{3}{4}R\right)^2 \implies \boxed{I_{total} = \frac{81}{16}MR^2}$$

---

6. Por teorema de ejes perpendiculares, $I_z = I_x + I_y$. Como para un disco homogéneo $I_x = I_y$, entonces $I_x = \frac{1}{2}I_z = \frac{1}{4}MR^2$. Para obtener el momento de inercia total, sumamos el momento de inercia de ambos discos:

   $$I_{total} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{4}(6M)\left(\frac{1}{4}R\right)^2 \implies \boxed{I_{total} = \frac{11}{32}MR^2}.$$

7. Como el I_{CM} de un cilindro es $\frac{1}{2}MR^2$, tenemos que $I_{\hat{e}1} = \frac{1}{2}MR^2$ y $I_{\hat{e}2} = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$.

   La energía cinética de rotación viene dada por $K = \frac{1}{2}I\omega^2$. Igualamos para hallar la relación entre los ω:

   $$K_{\hat{e}1} = K_{\hat{e}2} \Longrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2\right)\omega_2^2 \Longrightarrow \boxed{\omega_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\omega_1}$$

---

8. Es recomendable hallar primero la velocidad angular (pregunta 9). Como la bala se queda incrustada en la barra, su velocidad está relacionada con la velocidad angular de la barra, tal que $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

   $$\vec{v} = \frac{15}{32}\frac{v_o}{L}(-\hat{k}) \times \frac{4}{5}L\hat{\jmath} \Longrightarrow \boxed{\vec{v} = \frac{3}{8}\vec{v}_o}$$

---

9. Como durante el impacto no hay torques externos, el momento angular se conserva. Recordemos, además, que el I de una barra que rota en torno a un eje que se encuentra en su extremo es $\frac{1}{3}ML^2$. Tomando entonces el momento angular respecto al eje de la barra, tenemos:

   $$\vec{L}_i = \vec{L}_f \Rightarrow \frac{4}{5}L\hat{\jmath} \times \frac{5}{16}v_o\hat{\imath} = \left[\frac{5}{16}M\left(\frac{4}{5}L\right)^2 + \frac{1}{3}ML^2\right]\vec{\omega} \Longrightarrow \boxed{\vec{\omega} = \frac{15}{32}\frac{v_o}{L}(-\hat{k})}$$

   Nota: Recordemos que el momento angular de un rígido que rota es $\vec{L} = I\vec{\omega}$. Como la bala se adhiere a la barra, esta añade $\frac{5}{16}M\left(\frac{4}{5}L\right)^2$ al momento de inercia total de la barra.

---

10. La energía se conserva, por ende:

   $$K_i + U_i = K_f + \cancel{U_f} \Longrightarrow K_f = K' + MgH + mgh = K' + Mg\left(\frac{1}{2}L\right) + \left(\frac{5}{16}M\right)g\left(\frac{4}{5}L\right) \Longrightarrow \boxed{K_f = K' + \frac{3}{4}MgL}$$

   Aquí H representa a altura del centro de masa de la barra respecto a tierra. Como la barra es homogénea, su centro de masa se encuentra justo a la mitad de su longitud.

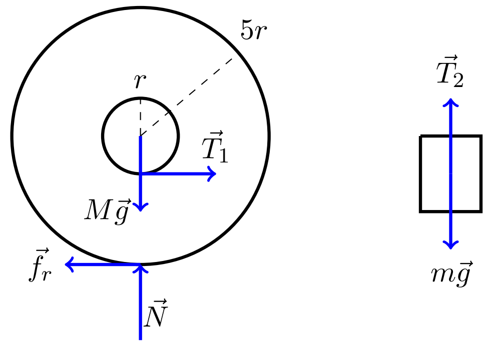
11. El diagrama de los sólidos ha sido dibujado a la derecha. Como la polea es ideal (sin masa), no necesitamos analizarla.
Las ecuaciones dinámicas para el yoyo son:

$$\sum F_x = T_1 - f_r = Ma_{CM} \tag{1}$$
$$\sum \tau_{CM} = 5rf_r - rT_1 = I_{CM}\alpha \tag{2}$$

Y para la caja es simplemente

$$\sum F_y = mg - T_2 = ma_b \tag{3}$$

No nos presenta mayor interés las fuerzas en y del yoyo.



<u>Vínculos:</u>
La polea es ideal, por lo tanto:

$$||T_1|| = ||T_2|| = T$$

Como el yo-yo rueda sin deslizar:

$$a_{CM} = \alpha R = 5\alpha r$$

El punto donde la cuerda hala al cilindro debe tener la misma aceleración que el punto donde la cuerda es halada por el bloque. Como ese último punto tiene la misma aceleración que el bloque, tenemos que:

$$a_b = ||a_{CM}\hat{\imath} + \alpha\hat{k} \times r\hat{\jmath}|| = ||5\alpha r\hat{\imath} - \alpha r\hat{\imath}|| = 4\alpha r$$

(a) Para hallar la relación, usamos el vínculo:

$$a_b = 4\alpha r = \frac{4a_{CM}}{5} \Longrightarrow \boxed{a_{CM} = \frac{5}{4}a_b}$$

(b) Si despejamos T de (3), obtenemos:

$$T = mg - ma_b = mg - \frac{4}{5}ma_{CM}$$

Despejando f_r de (1) y sustituyendo T:

$$f_r = (mg - \frac{4}{5}ma_{CM}) - 5ma_{CM} = mg - \frac{14}{5}ma_{CM}$$

Ahora solo falta sustituir los valores de f_r y T en la ecuación (3). Tomando en cuenta que por el vínculo, $a_{CM} = 4\alpha r$:

$$5r\left(mg - \frac{14}{5}ma_{CM}\right) - r\left(mg - \frac{4}{5}ma_{CM}\right) = (14mr^2)\alpha \Longrightarrow$$
$$5\left(g - \frac{14}{5}(4\alpha r)\right) - \left(g - \frac{4}{5}(4\alpha r)\right) = 14\alpha r \Longrightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{20}\frac{g}{r}}$$

(c) Como la cuerda no desliza en la polea, podemos usar directamente que $\alpha = \dfrac{a}{R}$:

$$\alpha_{polea} = \frac{a_b}{R} = \frac{\frac{4}{5}a_{CM}}{\frac{8}{5}r} = \frac{\frac{5}{4}\left(4\frac{1}{20}\frac{g}{r}r\right)}{\frac{8}{5}r} \Longrightarrow \boxed{\alpha_{polea} = \frac{1}{8}\frac{g}{r}}$$

(d) Usamos el valor de T que habiamos despejado antes:

$$T = mg - \frac{4}{5}ma_{CM} = mg - \frac{4}{5}m\left(4\frac{1}{20}\frac{g}{r}r\right) \Longrightarrow \boxed{T = \frac{4}{5}mg}$$

(e) Usando la expresión para f_r que hallamos antes:

$$f_r = mg - \frac{14}{5}ma_{CM} = mg - \frac{14}{5}m\left(4\frac{1}{20}\frac{g}{r}r\right) \Longrightarrow f_r = \frac{3}{10}mg$$

Como la fricción resulta en un valor positivo, apunta hacia la izquierda, como asumimos inicialmente. Por lo tanto $\boxed{\vec{f}_r = \frac{3}{10}mg(-\hat{\imath})}$.

Este parcial fue suministrado por el Prof. Kevin Ng y resuelto por Jean F. Gómez (15-10581) con asistencia del Prof. Ng para GUIAS USB

gecousb.com.ve
Twitter: @gecousb
Instagram: gecousb

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección
gecousb@gmail.com